Date

2010年　東大数学　文系第3問　理系第3問　②

・文系(2) 理系(2) $P_{2n}(10)$ を求めよ.

偶奇にわける問題か!?

(1)のxに$x=10$を代入する.

$x=10$なので. $0 \leqq x \leqq 15$

(1)より

$$P_{2n}(10) = \frac{1}{2} P_{2n-1}(20)$$

$x=20$なので. $16 \leqq x \leqq 20$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} P_{2n-2}(2\times 20-30)\right)$$

$$= \frac{1}{4} P_{2n-2}(10) + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad P_{2n}(10) = \frac{1}{4} P_{2n-2}(10) + \frac{1}{4}$$

nをズラして.

$$P_{2n+2}(10) = \frac{1}{4} P_{2n}(10) + \frac{1}{4}$$

$P_{2n} = Q_n$ とおく.

偶奇で場合がわかれる漸化式では $P_{2n}=Q_n$ のように置換するとよい.

$$Q_{n+1}(10) = \frac{1}{4} Q_n(10) + \frac{1}{4}$$

これで. 普通の漸化式

$$Q_{n+1}(10) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left\{Q_n(10) - \frac{1}{3}\right\}$$

$\left\{Q_n(10) - \frac{1}{3}\right\}$ は. 初項 $Q_1(10) - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である.

よって.

$$Q_n(10) - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$Q_n(10) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$P_{2n}(10) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

補

$$Q_1(10) = P_2(10) = \frac{1}{2}P_1(20)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$ を用いた。

注 偶奇にわかれる漸化式は頻出.

・理系(3) $P_{4n}(6)$ を求めよ.

周期4を疑う.

(1)のxに$x=6$を代入

$$P_{4n}(6) = \frac{1}{2} P_{4n-1}(12) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} P_{4n-2}(24)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} P_{4n-3}(24\times 2-30)\right\}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} P_{4n-3}(18)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} P_{4n-4}(18\times 2-30)\right\}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} P_{4n-4}(6)$$

$6\to12\to24\to18\to6$ と. 元に戻った

よって.

$$P_{4n+4}(6) = \frac{1}{16} P_{4n}(6) + \frac{1}{16}$$

$P_{4n}(6) = R_n(6)$ とおく.

$$R_{n+1}(6) = \frac{1}{16} R_n(6) + \frac{1}{16}$$

ふつうの漸化式. あとは解くだけ

$$R_{n+1}(6) - \frac{1}{5} = \frac{1}{16}\left\{R_n(6) - \frac{1}{5}\right\}$$

$\left\{R_{n+1}(6) - \frac{1}{5}\right\}$ は 初項 $R_1(6) - \frac{1}{5} = \frac{3}{16} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{80}$

公比 $\frac{1}{16}$ の等比数列.

よって $R_n(6) = -\frac{1}{80}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$

$$P_{4n}(6) = -\frac{1}{80}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$$

補

$$R_1(6) = P_4(6) = \frac{1}{2}P_3(12) = \frac{1}{4}P_2(24)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_1(18)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{16}$$